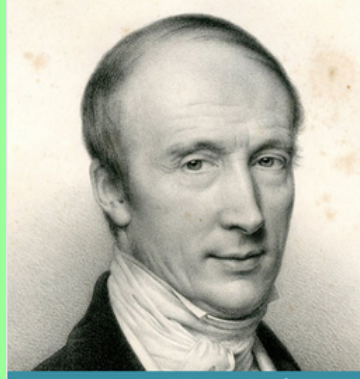


نبذة عن عالم

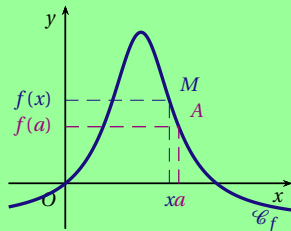
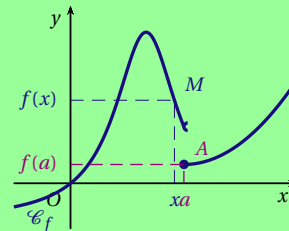
عرف القرن التاسع عشر اهتماما واسعا بالذقة الرياضية المؤدية إلى تحديد المفاهيم الأساسية للتحليل . و كان عالم الرياضيات و الفيزياء الفرنسي أوغستان لوي كوشي (1857 - 1789م)
Augustin-Louis Cauchy من بين رموز هذا التوجه .
 دخل كوشي مدرسة الهندسة (مدرسة الجسور و الطرق) وأشرف عليه بيير جيرارد *Pierre Girard* في مشروع قناة *Ourcq* ، وأسهم في انشاء ميناء بحري في شيربورغ عام 1810 .
 تميز كوشي بأعماله في الرياضيات ، وحل مجموعة مسائل تحد طرح عليه لاغرانج *Lagrange* ،
 و في عام 1814 نشر بحثا عن التكاملات المحدودة ، وعين كوشي في هذا العام أستاذا مساعدا في التحليل في مدرسة البوليتكنيك . درس طرق التكامل في كلية العلوم ، ووضع تعاريف دقيقة للنهايات والاتصال و التكامل و لتقارب المتتاليات و المتسلسلات . و ساهم في تعريف الاتصال على مجال $[a, b]$.



جوزيف لوي لاغرانج



أوغستان لوي كوشي

 f في متصلة a  f في متصلة غير a

La notion de continuité nous est familière : le temps s'écoule d'une manière continue , on ne passe pas brutalement de 12h à 12h01s , il n'y pas de saut . C'est en ce sens que l'expression fonction continue est employée en mathématiques .

بطاقة تقنية رقم : 02

ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 - 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكوريا علوم تجريبية درس : النهايات والاتصال التدبير الزمني : 15 ساعة
فقرات الدرس	<p>4 الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال</p> <p>5 العمليات على الدوال المتصلة</p> <p>6 صورة مجال بدالة متصلة</p> <p>1 مبرهنة القيم الوسطية</p> <p>2 الدالة العكسية لدالة متصلة</p> <p>3 دالة الجذر من الرتبة n</p>
المكتسبات القبلية	<ul style="list-style-type: none">• عموميات حول الدوال العددية• دراسة الدوال العددية• مفاهيم أساسية في درس النهايات والاشتقاق
الكفاءات المستهدفة	<ul style="list-style-type: none">• تحديد صورة قطعة أو مجال بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتبية قطعاً ؛• تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير...؛• استعمال طريقة التفرع الثنائي (<i>ladichotomie</i>) في تحديد قيم مقربة للحلول المعادلة أو لتأطير هذه الحلول ؛• تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة و مبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتبية قطعاً على مجال ؛
التوجيهات التربوية	<ul style="list-style-type: none">• يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن دالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ؛• نقبل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية والجذرية و الدوال المثلثية و الدالة جذر مربع ويتم التركيز على تطبيقاتها ؛• نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة وأن صورة مجال بدالة متصلة هي مجال ثم نستنتج مبرهنة القيم الوسطية ؛• نقبل خاصيات العمليات على الدوال المتصلة و اتصال مركب دالتين .
الوسائل اليداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

النهايات

نشاط

...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x^5 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27x^7 - x^3}{11x^5 - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 5x^3 - x^5 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 4x}{8x^4 + 2x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x^3 + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75}$$

1 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 27x^7 - x^3 - 4x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 6x + 4}{-x^3 + x^2 + 5x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{20 - x^3}{11x - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{20 - x^3}{11x - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 + x - 4}{x^2 + 6x + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 + x - 4}{x^2 + 6x + 8}$$

2 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5x - 3}{-3x^2 + 11x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5x - 3}{-3x^2 + 11x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x^3 + x}{2x - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{11x - 2x^2 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 6x + 4}{-x^3 + x^2 + 5x + 3}$$

3 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}} \frac{x + \sqrt{5}}{5 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$$

4 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$$

5 أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 7} - 3x + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x - 2} - x + 12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 - 1 - 12x + \sqrt{4x+7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \sqrt{8x-3} + 2x^4 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{7x-9} + 8x^5 - 4x^3 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{-9x-4} - 8x^2 - 3x - 1$$

الأشكال غير محددة

الأشكال غير المحددة هي : "0/0" "∞/∞" "0 × ∞" "+∞ - ∞"

خاصيات النهايات

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في ∞±

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

خاصية

نهايات دوال اعتيادية في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

خاصية

نهايات الدوال الجذرية والحدودية

2 نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

1 نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

خاصية

نهايات الدوال المتثلنية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$(a \neq 0); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

خاصية

النهايات و الترتيب

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{cases} 0 < f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\begin{cases} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{cases} |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\begin{cases} f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

1 الارتباط في نقطة - الارتباط على مجال

1.1 الارتباط في نقطة

نشاط

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمبايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

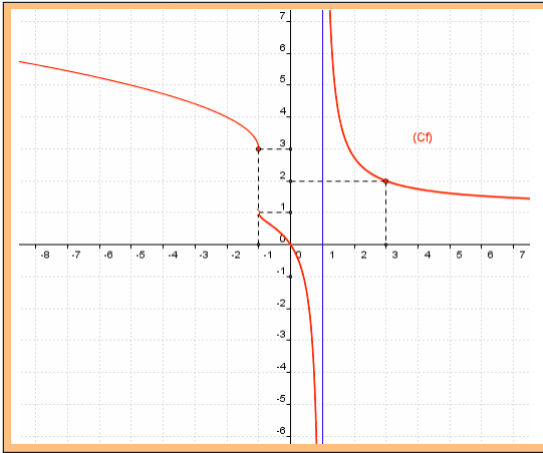
1 حدد مجموعة تعريف الدالة f

2 أحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3 أنشئ التمثيل المبياني للدالة f

⚡ نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ نقول إن الدالة f متصلة في 2

نشاط



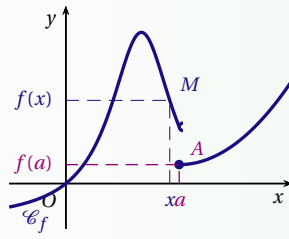
لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (أنظر الشكل جانبه) .

1 من خلال الشكل كيف ترى المنحنى C_f عند النقطة ذات الأفصول -1 ثم عند النقطة ذات الأفصول 3

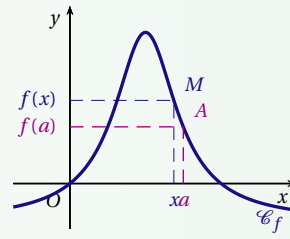
2 أ. أوجد مبيانيا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ و $f(3)$. ماذا تستنتج ؟

ب. أوجد مبيانيا $f(-1)$ ونهاية f عند -1 . ماذا تستنتج ؟

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



f غير متصلة في a



f متصلة في a

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$; $x \neq 1$
 $f(2) = 4$ لنبين أن f متصلة في 1 .

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x-1) \\ &= 4 = f(2) \end{aligned}$$

لذا بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في 1 .

إذا كانت f غير متصلة في a فإننا نقول إن f غير متصلة (أو منقطعة) في a .

...

1. تعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} & ; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ بين أن f متصلة في 3 .

2. تعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$ هل f متصلة في 1 ؟

تعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = a & ; a \in \mathbb{R} \end{cases}$ حدد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون f متصلة في 2 .

2.1 الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a, a+\alpha[$ حيث $(\alpha > 0)$ تكون f متصلة على اليمين في a إذا فقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha, a[$ حيث $(\alpha > 0)$ تكون f متصلة على اليسار في a إذا فقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصر من I ، تكون f متصلة في a إذا فقط إذا كانت متصلة على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{أي : } f \text{ متصلة على اليسار في } a$$

تطبيقي تمرين

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+3} & ; x > 1 \\ f(x) = x+1 & ; x \leq 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي :

2 هل الدالة f متصلة في 1 ؟

1 أدرس اتصال f على اليمين وعلى اليسار في 1

تطبيقي تمرين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي :

2 أدرس اتصال f في 2

1 أحسب $f(2)$

3.1 الاتصال على مجال

تعريف

- ...
- تكون الدالة f متصلة على المجال المفتوح $]a, b[$ إذا كانت متصلة في كل نقطة من المجال $]a, b[$.
 - تكون الدالة f متصلة على المجال المغلق $[a, b]$ إذا كانت متصلة على $]a, b[$ ومتصلة في a^+ و b^- .

ملاحظات

- ...
- نعرف بالمثل الاتصال على المجالات $[a, b[$ و $]a, b]$ و $]a, +\infty[$ و $]-\infty, b]$...
 - التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a, b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتان $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

دالة الجزء الصحيح

← دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي نرسم لها ب E والتي تحقق : $E(x) = n$ إذا كان $n \leq x < n+1$ (حيث $n \in \mathbb{Z}$)
 ← مثلاً :

$$3 \leq 3,5 < 3+1 \text{ لأن } E(3,5) = 3 \cdot$$

$$5 \leq 5 < 5+1 \text{ لأن } E(5) = 5 \cdot$$

$$-3 \leq -2,4 < -3+1 \text{ لأن } E(-2,4) = -3 \cdot$$

$$4 \leq 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} \leq \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5} < 3 \text{ لأن } E(\sqrt{5}) = 2 \cdot$$

1 مثل مبيانيا الدالة E على المجال $[0,4[$

2 أدرس اتصال الدالة E على المجالات $[0,1[$ ، $[0,2[$ ، $[1,2[$ ، $[1,3[$ ، و $[3,3,5]$

...

- كل دالة حدودية متصلة على \mathbb{R}
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالتين $x \rightarrow \cos(x)$ و $x \rightarrow \sin(x)$ متصلتين على \mathbb{R}
- الدالة $x \rightarrow \tan(x)$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+

...

- الدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ متصلة على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية)
- الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ متصلة على $\mathbb{R} - \{1\}$ (لأنها دالة جذرية)
- الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ متصلة بالخصوص على المجالين $] -\infty, 1[$ و $] 3, +\infty[$ (لأنها $] -\infty, 1[\subset \mathbb{R} - \{1\}$ و $] 3, +\infty[\subset \mathbb{R} - \{1\}$)

4.1 قصور دالة عددية

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J ضمن I بحيث $\forall x \in I f(x) = g(x)$ ، فإننا نقول إن الدالة g قصور الدالة f على المجال J .

إذا كانت الدالة f متصلة على I و g قصور الدالة f على المجال I فإن g متصلة على I

2 العمليات على الدوال المتصلة

خاصية

خاصية مقبولة

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عددا حقيقيا .
الدوال $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و (kf) و $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلة على I ($\forall x \in I g(x) \neq 0$)

مثال

...

- 1 الدالة $x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+ (لأنها مجموع الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلتين على \mathbb{R}^+)
- 2 الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $]0, +\infty[$ (لأنها مقلوب الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0, +\infty[$ و لا تنعدم على $]0, +\infty[$)
- 3 الدالة $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x+x^2}}$ متصلة على $]0, +\infty[$ (لأنها خارج الدالة $x \mapsto x+2$ المتصلة على $]0, +\infty[$ و الدالة $x \mapsto \sqrt{x+x^2}$ المتصلة على $]0, +\infty[$ و لا تنعدم على $]0, +\infty[$)

تطبيقي تمرين

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$I =]0, +\infty[\text{ و } f(x) = 2x + \sqrt{x} \quad 1$$

$$I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \quad 2$$

$$I =]0, +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} \quad 3$$

$$I =]0, +\infty[\text{ و } f(x) = \sin(x) + \sqrt{x} \quad 4$$

$$I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} \quad 5$$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بمايلي : $1 \leq x \leq 3$:

$$\begin{cases} f(x) = x + a & ; x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = bx + 1 & ; x > 3 \end{cases}$$
حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون f دالة متصلة على \mathbb{R}

نشاط

نعتبر f و g الدالتين العدديتين المعرفتين ب : $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

1 حدد الدالة $g \circ f$

2 ادرس اتصال f في 0 و اتصال g في $f(0)$

3 ادرس اتصال الدالة $g \circ f$ في 0

خاصية

اتصال مركب دالتين

لتكن f دالة متصلة على I و g دالة متصلة على J و $f(I) \subset J$
 الدالة : $g \circ f$ متصلة على I

مثال

لندرس اتصال الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ على D_f

• لدينا $D_f = \mathbb{R}^*$

• نضع : $f(x) = h(g(x))$ بحيث $g(x) = \frac{3}{x}$ و $h(x) = \sin(x)$

لدينا g دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها \mathbb{R}^* ، و h دالة متصلة على \mathbb{R} وبالخصوص على \mathbb{R}^* وبالتالي فإن f متصلة على \mathbb{R}^* (لأنها مركب دالتين متصلتين على \mathbb{R}^*)

تطبيقي تمرين

...

1 باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = \sin(x^3 - 3x + 2)$ على \mathbb{R}

2 باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمايلي : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ على $[-1, 1]$

...

1 إذا كانت f دالة موجبة و متصلة على مجال I (أي $\forall x \in I: f(x) \geq 0$) فإن الدالة $x \mapsto \sqrt{f}$ متصلة على المجال I

2 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \cos(f(x))$ متصلة على المجال I

3 إذا كانت الدالة f متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sin(f(x))$ متصلة على المجال I

تطبيقي تمرين

...

1 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمبايلي : $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$ على المجال $]1, +\infty[$

2 ادرس اتصال الدالة f المعرفة بمبايلي : $f(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$ على \mathbb{R}

3 صورة مجال بدالة متصلة

1.3 صورة قطعة - صورة مجال

خاصية

خاصية مقبولة

...

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

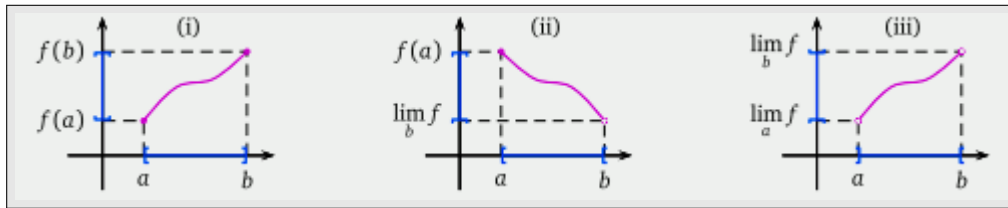
ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ فإن $f([a, b]) = [m, M]$ حيث m هي القيمة الدنيا ل f على $[a, b]$ ، و M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a, b]$

2.3 صورة مجال بدالة متصلة ورتبية قطعاً

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I لدينا النتائج التالية :

المجال $f(I)$	المجال I	رتابة الدالة f
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	f تزايدية قطعاً على I
$f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$[a, b[$	
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$]a, +\infty[$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	\mathbb{R}	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	f تناقصية قطعاً على I
$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)$	$[a, b[$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$]a, +\infty[$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	\mathbb{R}	



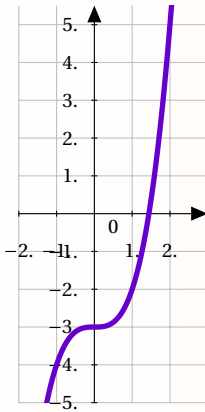
4 مبرهنة القيم الوسطية

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a, b]$ بما أن $f([a, b]) = [m, M]$ فإن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان إلى القطعة $[m, M]$ و لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لدينا $k \in [m, M]$. إذن : يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ بحيث $f(c) = k$

مبرهنة

مبرهنة القيم الوسطية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ بحيث : $f(c) = k$



نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب : $f(x) = x^3 - 3$ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (أنظر الشكل جانبه).

1 بين أن f تزايدية و متصلة على $[0, 2]$

2 أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم استنتج $f([0, 2])$

3 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0, 2]$

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ بحيث $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ (أو $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$) فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و حسب مبرهنة القيم الوسطية فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ بحيث : $f(c) = 0$.
العدد c هو حل المعادلة $f(x) = 0$

نتيجة

...

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $]a, b[$.
- إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $]a, b[$.

تطبيقي تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي : $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $[-1, 1]$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي : $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 1$:
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

5 طريقة التفرع الثنائي

نشاط

نعتبر الدالة العددية : $f(x) = x^3 + x + 1$

- | | |
|---|---|
| <p>5 أحسب $f\left(\frac{5}{8}\right)$ وتحقق أن $\alpha \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$</p> <p>6 أحسب $f\left(\frac{11}{16}\right)$ واستنتج تأطيرا للعدد α</p> <p>7 أحسب $f(0,682)$ و $f(0,683)$ واستنتج تأطيرا للعدد α سعته 10^{-3}</p> | <p>1 بين أن f متصلة على $[0, 1]$</p> <p>2 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 0 و 1</p> <p>3 أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وتحقق أن $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$</p> <p>4 أحسب $f\left(\frac{3}{4}\right)$ وتحقق أن $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$</p> |
|---|---|

هناك بعض المعادلات من نوع $f(x) = 0$ لا يمكن حلها جبريا ؛ لكن يمكن تحديد قيمة مقربة لحل هذه المعادلة وذلك باستعمال طريقة التفرع الثنائي .

طريقة

- لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على $[a, b]$ و $f(a)f(b) < 0$ إذن يوجد عدد وحيد α حل للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$
- إذا كان $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ فإن $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$.
نعيد هذه العملية بتعويض a ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$...
 - إذا كان $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ فإن $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا تأطير ل α سعته $\frac{b-a}{2}$.
نعيد هذه العملية بتعويض b ب $\frac{a+b}{2}$ فنحصل على تأطير سعته $\frac{b-a}{4}$...

نعيد هذه العملية ككل إلى أن نحصل على التأطير المرغوب فيه

بين أن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$ ؛ ثم حدد تأطيرا للعدد α سعته $\frac{1}{8}$

6 الدالة العكسية لدالة متصلة

1.6 الدالة العكسية

نشاط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 1$

1 بين أن f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

2 تحقق أن $f([0, +\infty[) \subset [-1, +\infty[$

3 بين أن كل عنصر y من $[-1, +\infty[$ يقبل سابقاً وحيداً x من $[0, +\infty[$ وأن $x = \frac{1}{2}\sqrt{y+1}$

ملاحظة

...

- كل عنصر من $[0, +\infty[$ له صورة وحيدة في $[-1, +\infty[$ و كل عنصر من $[-1, +\infty[$ له سابق وحيد في $[0, +\infty[$
- نقول إن f تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[-1, +\infty[$
- توجد دالة وحيدة يرمز لها ب f^{-1} معرفة على $[-1, +\infty[$ ب $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ وتسمى الدالة العكسية للدالة f

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I فإن لكل عنصر y من $J = f(I)$ المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيداً في I نعبّر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو J

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و $J = f(I)$ ، الدالة التي تربط كل عنصر y بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها ب f^{-1}

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية لدينا :

$$(\forall y \in J) (\exists! x \in I) : f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(\forall y \in J) : (f \circ f^{-1})(y) = y$$

تطبيقي تمرين

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = \sqrt{x-1}$

- 1 بين أن f متصلة ورتيبة قطعاً على $[1, +\infty[$
- 2 استنتج أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
- 3 حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تطبيقي تمرين

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^2$

- 1 بين أن f تقابل من $I = [0, +\infty[$ نحو $J = [0, +\infty[$
- 2 حدد f^{-1} الدالة العكسية للدالة f
- 3 أنشئ في نفس المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) المستقيم $y = x$ والمنحنيين (\mathcal{C}_f) و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$. ماذا تلاحظ ؟

2.6 خصائص الدالة العكسية

نشاط

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية :

- الدالة f^{-1} معرفة ومتصلة على $J = f(I)$
- الدالة f^{-1} رتيبة قطعاً على $J = f(I)$ ولها نفس منحنى تغير الدالة f
- في المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) منحنى الدالة f^{-1} متماثل مع منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$

7 دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [0, +\infty[$ ب : $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$:
بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على مجال J يجب تحديده .

نعلم أن الدالة $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) متصلة وتزايدية قطعاً على $I = [0, +\infty[$ إذن تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J = f(I) = [0, +\infty[$

خاصية و تعريف

...

• الدالة العكسية f^{-1} تسمى دالة الجذر من الرتبة n

• الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب $\sqrt[n]{}$

• نكتب $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ أو أيضا $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

ملاحظة

...

• حالة $n=1$: $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$

• حالة $n=2$: $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (الجذر مربع)

• حالة $n=3$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الجذر مكعب)

خاصية

...

• في معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ منحنى الدالة $f(x) = \sqrt[n]{x}$ مع (\mathcal{C}_f) منحنى الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للنصف الأول (المستقيم $y=x$)

• $\sqrt[n]{1} = 1$ و $\sqrt[n]{0} = 0$

• $(\sqrt[n]{x})^n = x$ و $(\forall x \geq 0) \sqrt[n]{x^n} = x$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

نتائج

...

• $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$

• $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall b \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$

مثال

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ ؛ $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

تطبيقي تمرين

حل في \mathbb{R} المعادلات التالية : $x^3 = 5$ ؛ $x^6 = -9$ ؛ $x^4 = 81$ ؛ $x^3 = -8$

خاصية

العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن x و y عنصرين من \mathbb{R}^+ و m و n عنصرين من \mathbb{N}^* لدينا :

$$(y \neq 0) : \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \cdot$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \text{ و } \sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m} \cdot$$

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \cdot$$

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \cdot$$

تطبيقي تمرين

أحسب وإسط العدد A حيث : $A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9^5}}{\sqrt[3]{3}}$

1.7 القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب

تعريف

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعاً و r عدداً جذرياً غير منعدم حيث $r = \frac{p}{q}$ $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$
القوة الجذرية للعدد الحقيقي x ذات الأساس r هي العدد الحقيقي x^r و المعرفة بمبايلي : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

مثال

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \text{ ؛ } \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}} \text{ ؛ } \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

خاصية

ليكن r و r' عددين جذريين و a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً لدينا :

$$a^r a^{r'} = a^{r+r'} \cdot$$

$$\frac{a^r}{b^{r'}} = a^{r-r'} \cdot$$

$$(a^r)^{r'} = a^{rr'} \cdot$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \cdot$$

$$\frac{1}{a^r} = a^{-r} \cdot$$

$$a^r b^r = (ab)^r \cdot$$

تطبيقي تمرين

إسط العددين A و B حيث : $B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$ ؛ $A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right)$